平成9年

(9) ある会社に、段ボール箱100箱分のコンピュータ出力リストが届いた。各リストはすべて異なり、それぞれの段ボール箱には十分多くの枚数のリストが、同じ枚数ずつ、無作為に収められているとする。この100箱の中から、特定の異なる2枚のリストを探し出すために開ける必要のある段ボール箱の個数は平均して $\boxed{\phantom{00}}$ 箱（小数点以下四捨五入）である。なお2枚のリストは同一の段ボール箱に入っていることもあるとする。

解

(9) k番めの箱を開けた時に探しているリストが見つかる確率は $\frac{1}{100}$、したがって、k番めの箱を開けた時にそのリストが既に見つかっている確率は $\frac{k}{100}$ である。おのおののリストは独立に見つかると考えられるので、k番めの箱を開けた時に目的の2枚のリストが既に見つかっている確率は $\left(\frac{k}{100}\right)^2$

よって、k番めの箱を開けて初めてその2枚のリスト両方のありかが判明する確率 $P_k$ は、$P_k=\left(\frac{k}{100}\right)^2-\left(\frac{k-1}{100}\right)^2\ (k\geq 2)$

これは、k=1の時も成り立つ。

よって、求める平均は、

$$\sum_{k=1}^{100}k\cdot P_k=\sum_{k=1}^{100}k\cdot\left(\frac{k}{100}\right)^2-\sum_{k=0}^{99}(k+1)\cdot\left(\frac{k}{100}\right)^2=100-\sum_{k=1}^{99}\left(\frac{k}{100}\right)^2$$

$$=100-\frac{1}{10000}\cdot\frac{99\times100\times199}{6}=\frac{13433}{200}=67.165$$

$\rightarrow$ 67個

平成10年

(7) 1からnまでの相異なる番号のついたn枚のカードを無作為に1列に並べる。番号kのカードがk番目の位置を占めるならば $X_k=1$、そうでなければ $X_k=0$ とし、$S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$ と定義する。すなわち、$S_n$ は番号と同じ位置にきたカードの枚数である。このとき、$S_n$ の期待値および分散はそれぞれ $E(S_n)=\boxed{\phantom{00}}$、$V(S_n)=\boxed{\phantom{00}}$ である。

(7) $P(X_i=1)=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}$, $P(X_iX_j=1)=\frac{(n-2)!}{n!}=\frac{1}{n(n-1)}\ (i\neq j)$ である。

したがって、$E(X_i)=\frac{1}{n}, E(X_i^2)=E(X_i)=\frac{1}{n}, E(X_iX_j)=\frac{1}{n(n-1)}$ である。

これらを使って、

$$E(S_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)=\frac{1}{n}\times n=1$$

$$V(S_n)=\sum_i E(X_i^2)+2\sum_{i<j}E(X_iX_j)-E(S_n)^2=\frac{1}{n}\times n+2\times{}_nC_2\times\frac{1}{n(n-1)}-1^2=1+2\times\frac{1}{2}-1=1$$

コメント　確率変数のベルヌーイ確率変数（0,1の値をとる）の和への分解と重要公式 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$（期待値の線型性）を使う問題

なお $Cov(X_i,X_j)=\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n^2}=\frac{n-(n-1)}{n^2(n-1)}=\frac{1}{n^2(n-1)}$ $(i\neq j)$ より

$V(X_1+X_2+\cdots+X_n)=V(X_1)+\cdots+V(X_n)+Cov(X_1,X_2)+\cdots+Cov(X_{n-1},X_n)$

$=nV(X_1)+n(n-1)Cov(X_1,X_2)=n\frac{1}{n}\frac{n-1}{n}+n(n-1)\frac{1}{n^2(n-1)}=1$ を使う方が良いと思われる。

平成11年 (12) 成功確率$\frac{1}{3}$の試行を繰り返し行い（異なる回の試行が成功するかどうかは互いに独立とする）、成功するごとに、つぼに玉を1個入れるというゲームを行う。3個の玉が入った状況でつぼに玉を入れると玉があふれ、つぼに入った玉は3個に戻る仕組みになっている。つぼからあふれた玉の個数を得点とすると、ゲーム終了時の得点の期待値は $\boxed{\phantom{xxxx}}$ である。ただし、つぼに玉が入っていない状況から始め、試行が通算で3回失敗したときに、このゲームは終了するものとする。

（解答）$\frac{29}{162}$ *または* 01790

オリジナル・アイデアは野球の問題「打率.333（すべて内野安打）の打者をそろえたチームの1イニングの得点の期待値を求めよ（四死球、盗塁、2以上の進塁等はないものとする）」であった。イメージが掴みやすいので、このオリジナル・アイデアに基づいて解答を書く。

方針として、ヒット数の期待値を求め、これを修正して得点の期待値を求める。

3アウトになるまでのヒット数を確率変数$X$とする。
確率関数を、$P(X=k)=f(k)$　とする。
アウト数0の間のヒットの数を確率変数$Y_1$、アウト数1の間のヒットの数を確率変数$Y_2$、アウト数2の間のヒットの数を確率変数$Y_3$とする。$X=Y_1+Y_2+Y_3$　　$Y_1, Y_2, Y_3$は同じ分布に従う。

$P(Y_1\geq 1)=\frac{1}{3}$　、$P(Y_1\geq 2)=\left(\frac{1}{3}\right)^2$　、$P(Y_1\geq 3)=\left(\frac{1}{3}\right)^3$　、・・・・　なので、

$$E[Y_1]=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-1=\frac{1}{2}$$

$$E[X]=E[Y_1+Y_2+Y_3]=E[Y_1]+E[Y_2]+E[Y_3]=3\cdot E[Y_1]=3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$　・・・ヒット数の期待値

従って、$\sum_{k=0}^{\infty}(k\cdot f(k))=\frac{3}{2}$　（4.5打数1.5安打で、.333となる）

一方、求める得点の期待値は、

$$\sum_{k=3}^{\infty}\{(k-3)\cdot f(k)\}=\sum_{k=0}^{\infty}(k\cdot f(k))-3\sum_{k=0}^{\infty}f(k)+3f(0)+2f(1)+f(2)=\frac{3}{2}-3+3f(0)+2f(1)+f(2)$$

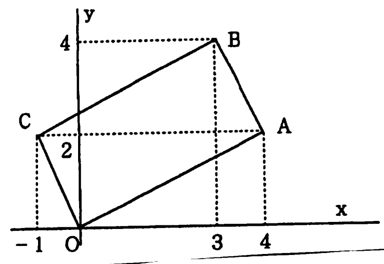
$$f(0)=\left(\frac{2}{3}\right)^3 \qquad f(1)=\binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2^3}{3^3} \qquad f(2)=\binom{4}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2^4}{3^4}$$

これらを代入すると、求める期待値は、

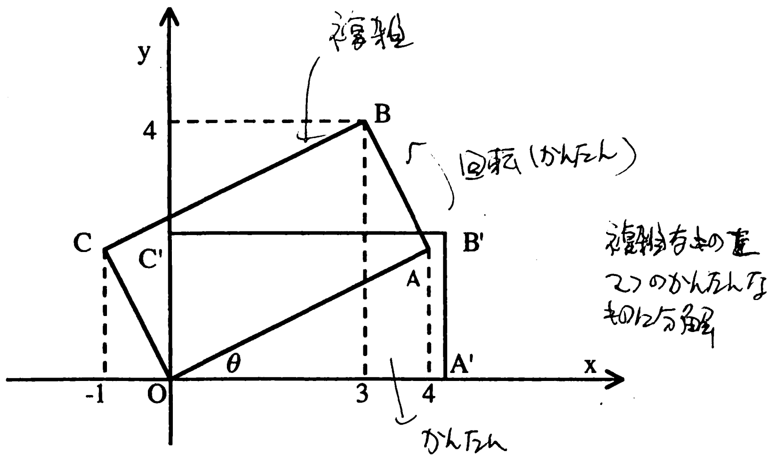
$$\sum_{k=3}^{\infty}\{(k-3)\cdot f(k)\}=-\frac{3}{2}+\frac{8}{9}+\frac{16}{27}+\frac{16}{81}=\frac{-243+144+96+32}{162}=\frac{29}{162}\fallingdotseq 01790$$

コメント　$Y_1\sim Y_2\sim Y_3\sim Ge\left(\frac{2}{3}\right)$ より $X\sim NB\left(3,\frac{2}{3}\right)$　つまり本問は $E(\max(X-3,0))$ を求める問題と同じで　一般に $\max(X,Y)+\min(X,Y)=X+Y$ より
$\max(X-3,0)=X-3+0-\min(X-3,0)=X-3-\min(X-3,0)$ より
$E(\max(X-3,0))=E(X)-3-E(\min(X-3,0))=3E(Y_1)-3+3P(X=0)+2P(X=1)+P(X=2)$ としている。
解答すばらしいものである。また　nアウトランナーなし、nアウトランナー1塁、nアウトランナー1塁2塁、nアウトランナー満塁の12個の状態のマルコフ連鎖の問題として全すれば解ける。

（2）図の長方形OABC内で一様分布をする点Pのx座標をX、y座標をYで表わすとき、E（XY）＝ $\boxed{\phantom{00}}$ である。




（2）OABCは原点Oを頂点とする第一象限内の長方形OA'B'C'を回転したものと考えられる。そこで、OA'B'C'上で一様分布に従う確率変数を(ξ, η)、回転角度をθとする。




今、$\overline{OA}=\overline{OA'}=2\sqrt{5}$, $\overline{OC}=\overline{OC'}=\sqrt{5}$ から、ξ, ηは独立でそれぞれ $\left[0,\ 2\sqrt{5}\right]$, $\left[0,\ \sqrt{5}\right]$ 上で一様分布に従う。X, Yをξ, ηで表わすと、

$\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ $\left(\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ より、

$X=\xi\cos\theta-\eta\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2\xi-\eta)$, $Y=\xi\sin\theta+\eta\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\xi+2\eta)$ となる。

よって、

$$E(XY)=E\left(\frac{1}{5}(2\xi-\eta)(\xi+2\eta)\right)=\frac{1}{5}E\left(2\xi^2+3\xi\eta-2\eta^2\right)=\frac{2}{5}E\left(\xi^2\right)+\frac{3}{5}E(\xi)\,E(\eta)-\frac{2}{5}E\left(\eta^2\right)$$

（∵ ξ, ηは独立）

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{20}{3}+\frac{3}{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{3}$$

$$=\boxed{\frac{7}{2}}\quad\left(\because\ E(\xi)=\sqrt{5},\ E(\eta)=\frac{\sqrt{5}}{2},\ E\left(\xi^2\right)=\frac{20}{3},\ E\left(\eta^2\right)=\frac{5}{3}\right)$$

平成18年

（4）確率変数 $X, Y, Z$ が独立にそれぞれ一様分布 $U(0,2)$, $U(-1,1)$, $U(-2,0)$ に従うとき、

y軸対称性あり

$\boxed{\text{対称性}}$が使える。

$$S = X + Y + Z \text{ の密度関数は、} \begin{cases} \boxed{①} & (-3 \le s \le -1) \\ \boxed{②} & (-1 < s \le 1) \\ \boxed{③} & (1 < s \le 3) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \text{である。}$$

(A) $\dfrac{(s+3)^2}{4}$　(B) $\dfrac{(s+3)^2}{8}$　(C) $\dfrac{(s+3)^2}{16}$　(D) $\dfrac{(s-3)^2}{4}$　(E) $\dfrac{(s-3)^2}{8}$　(F) $\dfrac{(s-3)^2}{16}$

(G) $\dfrac{3+s^2}{4}$　(H) $\dfrac{3+s^2}{8}$　(I) $\dfrac{3+s^2}{16}$　(J) $\dfrac{3-s^2}{4}$　(K) $\dfrac{3-s^2}{8}$　(L) $\dfrac{3-s^2}{16}$

---

解

（4）

$X, Y, Z$ の確率密度関数はそれぞれ以下のとおり表せる。

$$f(x) = \frac{1}{2} \ (0 \le x \le 2), \quad g(y) = \frac{1}{2} \ (-1 \le y \le 1), \quad h(z) = \frac{1}{2} \ (-2 \le z \le 0)$$

$R = X + Y$ の密度関数を $m(r)$ とする。

$r = x + y$, $p = x$ とすると、$x = p$, $y = r - p$ より、$|J| = 1$ であるから、

$$m(r) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p) \cdot g(r-p) dp$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot g(r-x) dx$$

ここで $\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ -1 \le r - x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ r - 1 \le x \le r + 1 \end{cases}$ であるから、この共通範囲で積分すると

$$m(r) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{r+1} \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} dx = \frac{r+1}{4} & (-1 \le r \le 1) \\ \displaystyle\int_{r-1}^{2} \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} dx = \frac{3-r}{4} & (1 < r \le 3) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

$S = X + Y + Z = R + Z$ の密度関数を $n(s)$ として同様に考えると、

$$n(s) = \int_{-\infty}^{\infty} m(r) \cdot h(s-r) dr$$

また $\begin{cases} -1 \le r \le 3 \\ -2 \le s - r \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le r \le 3 \\ s \le r \le s + 2 \end{cases}$ であるから、この共通範囲で積分すると

$$n(s) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{s+2} \frac{r+1}{4} \times \frac{1}{2} dr = \frac{(s+3)^2}{16} & (-3 \le s \le -1) \\ \displaystyle\int_s^1 \frac{r+1}{4} \times \frac{1}{2} dr + \int_1^{s+2} \frac{3-r}{4} \times \frac{1}{2} dr = \frac{3-s^2}{8} & (-1 < s \le 1) \\ \displaystyle\int_s^3 \frac{3-r}{4} \times \frac{1}{2} dr = \frac{(s-3)^2}{16} & (1 < s \le 3) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

コメント

s=−3で0

よって解答は　① (C)　② (K)　③ (F)

s=3で0

s=±1でそれぞれ (C),(F)に一致

A4

[illegible]

2．ある人が互いに異なるn個の鍵を束ねた鍵束を持っており、この中から無作為に鍵を選んで、ある1つの扉を開けようとしている。このとき、次のそれぞれ2つの場合について扉が開くまでの試行回数の平均値と分散を求めよ。なお、n個の鍵の中に正しい鍵は1つだけあるものとし、扉が開いたときの試行も回数に含めるものとする。

（1）扉が開かなかった鍵を鍵束から除いて、次の試行を行う。

（2）扉が開かなかった鍵を鍵束に戻して、次の試行を行う。ただし、鍵束に戻した後、試した鍵と試していない鍵との見分けはつかなくなるものとする。

（20点）

2．

（1）k回目の試行で扉が開く確率は $\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-2}{n-1}\cdots\dfrac{n-k+1}{n-k+2}\cdot\dfrac{1}{n-k+1}=\dfrac{1}{n}$

くじ引きの公平性より明らか

従って、扉が開くまでの試行回数の平均値は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{1}{n}=\underline{\frac{n+1}{2}}$

分散は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2\cdot\frac{1}{n}-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{(n+1)^2}{4}=\underline{\frac{n^2-1}{12}}$

（2）k回目の試行で扉が開く確率は $\dfrac{1}{n}\cdot\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-1}$

従って、扉が開くまでの試行回数の平均値は $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{n}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}$

$\dfrac{1}{1-x}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}x^k$ $(|x|<1)$

の両辺を微分して得られる

$\dfrac{1}{(1-x)^2}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}kx^{k-1}$ $(|x|<1)$

を使うと簡単

この和をSと置くと、

$$S=\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)+\frac{3}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+\cdots+\frac{k}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}+\cdots$$

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)S=\qquad\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)+\frac{2}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+\cdots+\frac{k-1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}+\cdots$$

$$\therefore\ \frac{1}{n}S=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)+\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}+\cdots=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1-\frac{n-1}{n}}=1$$

従って、求める平均値は $\underline{n}$

また、$T=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{n}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}$ と置くと、

上を微分して得られる

$\dfrac{2}{(1-x)^3}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)x^{k-2}$ $(|x|<1)$

と $k^2=k(k-1)+k$ の分割を

用いると簡単

$$T=\frac{1}{n}+\frac{4}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)+\frac{9}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+\frac{16}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^3+\cdots+\frac{k^2}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}+\cdots$$

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)T=\qquad\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)+\frac{4}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+\frac{9}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^3+\cdots+\frac{(k-1)^2}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}+\cdots$$

$$\therefore\ \frac{1}{n}T=\frac{1}{n}+\frac{3}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)+\frac{5}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+\frac{7}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^3+\cdots+\frac{2k-1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}+\cdots$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k-1}{n}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}=2S-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}=2n-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1-\frac{n-1}{n}}$$

$$=2n-1$$

$\therefore\ T=n(2n-1)$

よって、求める分散は $n(2n-1)-n^2=\underline{n(n-1)}$

平成16年

(4) $X_1$ , $X_2$ , $X_3$ を、互いに独立でそれぞれ区間 $[0,1]$ 上の一様分布に従う確率変数とする。このとき、確率 $P\left(X_1 + X_2{}^2 + X_3 < 1\right)$ = $\boxed{\phantom{xx}}$ である。

[解答例]

分布の和を求める問題である。３つ確率変数の和の分布を直接求めることは、２つ確率変数の和の分布を求めるのに比べ格段に複雑になる。したがって、

$Y = X_1 + X_3$

$Z = X_2{}^2$

のそれぞれの分布を求め、その後 $Y + Z < 1$ となる確率を求めることとする。

$Y \ge 0$ , $Z \ge 0$ 　だから、$Y < 1$ , $Z < 1$ 　の部分のみ考えればよい。

$Y = X_1 + X_3$ 　の確率密度関数を $f(y)$ とすると、$0 \le y < 1$ において、$f(y) = y$ 　(*)詳細は後記

$Z = X_2{}^2$ 　の分布関数を $G(z)$ とすると、$0 \le z < 1$ において、$G(z) = \sqrt{z}$ 　(**)詳細は後記

とする。($Z$ の確率密度関数を $g(z)$ とする。)

確率変数 $U = Y + Z$ の確率密度関数は、$k(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cdot g(u-y)dy$

$y < 0$ ならば $f(y) = 0$
$u - y < 0$ ならば $g(u-y) = 0$
これを反映すると、$0 \le u < 1$ の範囲で、

$$k(u) = \int_0^u f(y) \cdot g(u-y)dy = \int_0^u y \cdot g(u-y)dy = -\Big[\ y \cdot G(u-y)\ \Big]_{y=0}^{y=u} - \int_0^u G(u-y)dy$$

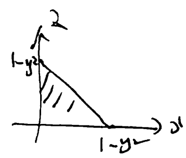
$$= -\Big[\ y\sqrt{u-y}\ \Big]_{y=0}^{y=u} - \int_0^u \sqrt{u-y}\,dy = -\frac{2}{3}\Big[\ (u-y)^{3/2}\ \Big]_{y=0}^{y=u} = \frac{2}{3}u^{3/2}$$

$$\mathrm{P}\left(X_1 + X_2{}^2 + X_3 < 1\right) = \mathrm{P}(Y + Z < 1) = \int_0^1 k(u)du = \frac{2}{3}\int_0^1 u^{3/2}du = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\Big[\ u^{5/2}\ \Big]_{u=0}^{u=1} = \frac{4}{15} = 0.2667$$

別解1 　**■計算例** 　$X, Y, Z \sim U(0,1)$ 　$X, Y, Z$ は独立のとき

$$\begin{aligned}
P(X + Y^2 + Z \le 1) &= \iiint_{0\le x\le 1,\,0\le y\le 1,\,0\le z\le 1,\,x+y^2+z\le 1} dx\,dy\,dz \\
&= \iiint_{x+u+z\le 1} \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}dx\,du\,dz \\
&= \frac{1}{2}B\left(1, \frac{1}{2}, 1, 1\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} \\
&= \frac{4}{15}
\end{aligned}$$

面積




別解2 　$P(X + Y^2 + Z \le 1) = \iiint_{0\le x,y,z\le 1\ \ x+z\le 1-y^2} dx\,dy\,dz = \int_0^1 dy \iint_{0\le x,z\le 1,\,x+z\le 1-y^2} dx\,dy = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-y^2)^2 dy = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-2y^2+y^4)dy = \frac{4}{15}$ //

平成5年

3．確率変数Nは平均λ（λ > 0）のポアソン分布に従う。確率変数Yを次のとおり定義するとき、E（Y）を求めよ。

$$Y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^{N+1}\exp(-x^2/2)\,dx$$

（20点）

3．

$$I_n=\int_{-\infty}^{\infty} x^n\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx \quad \text{とおく}$$

nが奇数のとき　$I_n=0$

nが偶数（＝2m）のとき

$$I_{2m}=\int_{-\infty}^{\infty} x^{2m}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} x^{2m-1}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$$

$$=\left[x^{2m-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right)\right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}(2m-1)x^{2m-2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$$

$$=(2m-1)I_{2m-2}$$

$$\therefore I_{2m}=(2m-1)(2m-3)\cdots\cdots 3\cdot 1\cdot 1$$

よって、Yは値0、1、1・3、………、1・3・……・（2m−1）、……

をとる確率変数で

$$P(Y=1\cdot 3\cdot\cdots\cdots\cdot(2m-1))=P(N=2m-1)\quad(m=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

$$P(Y=0)=\sum_{k=0}^{\infty}P(N=2k)\quad \text{となる。}$$

$$\text{従って、}E(Y)=\sum_{m=1}^{\infty}1\cdot 3\cdot\cdots\cdots\cdot(2m-1)P(N=2m-1)$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}1\cdot 3\cdot\cdots\cdots\cdot(2m-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2m-1}}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdots\cdot(2m-2)}$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2m-1}}{2^{m-1}(m-1)!}$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\lambda e^{-\lambda}\frac{(\lambda^2/2)^{m-1}}{(m-1)!}$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)=\lambda\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}-\lambda\right)$$

別解　$E(Y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}E(x^{N+1})e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x\,e^{\lambda(x-1)}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

ポアソン分布の母関数（これは覚えておくべき）

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\lambda(x-1)}\left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)'dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\underbrace{\left[e^{\lambda(x-1)}\left(-e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0}-\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda e^{\lambda(x-1)}\left(-e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)dx\right)$

$=\lambda e^{-\lambda}E(e^{\lambda N(0,1)})=\lambda e^{-\lambda}e^{\frac{\lambda^2}{2}}$

標準正規分布のモーメント母関数

注意　厳密には フビニの定理の 積分の交換できるための条件を押えておくべき。

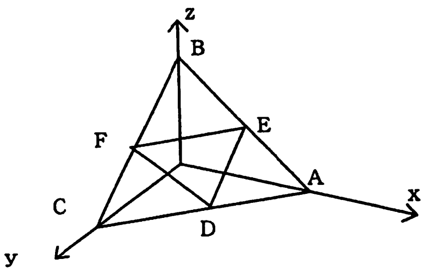
この場合は $E\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^{N+1}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}E(|x|^{N+1})e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|x|e^{\lambda(|x|-1)}e^{-\frac{x^2}{2}}dx<+\infty$ で良いだろう。

平成10年

(5) 三角形を内角の大きさを任意に定めて描くとき、それが鈍角三角形となる確率は $\boxed{\phantom{xx}}$ である。

← 空気を読まねばならない。!!

(5) 3つの角の大きさを x, y, z とすると、x+y+z=180 (0<x, y, z<180)。鈍角三角形になる場合は、x>90, x>y+z または y>90, y>x+z または z>90, z>x+y。上記より、x, y, z は、下図の三角形 ABC 上に一様に分布し、鈍角三角形になるのは、三角形 DEF 以外の部分であるから、求める確率は $\frac{3}{4}$ である。

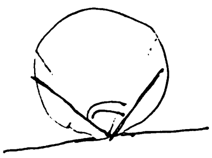



コメント 「3つの角の大きさを X, Y, Z とおくと、(X, Y, Z) は $\{(x,y,z) \mid x+y+z=180,\ 0<x,y,z<180\}$ 上の一様分布、つまり (X, Y) は $\{(x,y) \mid x+y \leqq 180,\ x,y>0\}$ 上の一様分布と仮定する。

このとき鈍角三角形となる確率を求めよ。」とすべきである

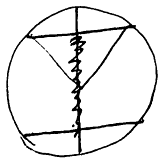
似たようなものとして ベルトランのパラドックス 「円周上の弦の長さが半径より大きい確率を求めよ。」

解1.



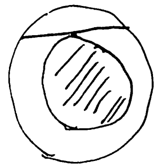
$\frac{120}{180} = \frac{2}{3}$

解2



$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

解3.



$\frac{\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\pi} = \frac{3}{4}$

平成8年

(5) 互いに独立な確率変数 X, Y, Z が、すべて標準正規分布 N (0, 1) に従うものとする。このとき、$U = X^2 + Y^2 + Z^2$ の確率密度関数 f(u) は、$f(u) = \begin{cases} \boxed{\phantom{xx}} & (u \geq 0) \\ 0 & (u < 0) \end{cases}$ である。

(5) U の確率分布関数は、$F(u) = \int_{x^2+y^2+z^2 \leq u} (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)\right) dxdydz$

ここで、$x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ とおいて、ヤコビアンを求めると、

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= r^2(\sin\theta)^3(\cos\varphi)^2 + r^2(\sin\theta)^3(\sin\varphi)^2 + r^2(\cos\theta)^2\sin\theta(\cos\varphi)^2 + r^2(\cos\theta)^2\sin\theta(\sin\varphi)^2$$

$$= r^2(\sin\theta)^3 + r^2(\cos\theta)^2\sin\theta = r^2\sin\theta$$

これより、

$$F(u) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta \int_0^{\sqrt{u}} \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) r^2 dr = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2\pi \cdot [-\cos\theta]_0^{\pi} \int_0^{\sqrt{u}} \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) r^2 dr$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot \int_0^{\sqrt{u}} \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) r^2 dr$$

よって、$f(u) = F'(u) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot u \exp\left(-\frac{1}{2}u\right) \cdot \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \boxed{(2\pi)^{-\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}u\right)}$

別解 $X^2$ や $Y^2$, $Z^2$ は $\chi^2_1$ (自由度1のカイ二乗分布) は $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ と ガンマ分布の再生性より

$f_{X^2+Y^2+Z^2}(x) = f_{\Gamma(\frac{3}{2},\frac{1}{2})}(x) = \frac{(\frac{1}{2})^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{\frac{3}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x}$ $(x>0)$